

# NLA: Andere methodes voor het berekenen van eigenwaarden

Nithin Govindarajan

KU Leuven

August 24, 2023

## Wat wordt er behandeld?

- ▶ Lecture 30 van Trefethen and Bau.
- ▶ Alleen het gedeelte over Jacobi methode wordt besproken.
- ▶ Een selectie van oefeningen.

**Probeer het eerst zelf te oplossen!**

# De rotatie-matrix in 2D

- Roteert een vector met een hoek  $\phi \in [0, 2\pi)$ :

$$G_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

- Is unitair:  $G_\phi^T = G_\phi^{-1}$ .
- Verkorte notatie:

$$G_\phi = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi \\ s_\phi & c_\phi \end{bmatrix}$$

# Oefening 1

Gegeven een 2-bij-2 reële, symmetrische matrix:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

vind  $\phi \in [0, 2\pi)$  zodat  $G_\phi A G_\phi^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$ .

## Oefening 1 - antwoord

Met een klein beetje algebra, weten we dat:

$$G_{\phi} A G_{\phi}^T = \begin{bmatrix} c_{\phi} & -s_{\phi} \\ s_{\phi} & c_{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{\phi} & s_{\phi} \\ -s_{\phi} & c_{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

met:

$$\gamma_{11} = c_{\phi}^2 a_{11} - 2s_{\phi}c_{\phi}a_{12} + s_{\phi}^2 a_{22}$$

$$\gamma_{12} = (c_{\phi}^2 - s_{\phi}^2) a_{12} + c_{\phi}s_{\phi}(a_{11} - a_{22})$$

$$\gamma_{22} = s_{\phi}^2 a_{11} + 2s_{\phi}c_{\phi}a_{12} + c_{\phi}^2 a_{22}$$

We willen:

$$(c_{\phi}^2 - s_{\phi}^2) a_{12} + c_{\phi}s_{\phi}(a_{11} - a_{22}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(2\phi) = \frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}}$$

## Givens rotaties

Neem de eenheidsmatrix en plaats in de posities  $(p, p)$ ,  $(p, q)$ ,  $(q, p)$  en  $(q, q)$  de waarden van de 2-bij-2 rotatie-matrix:

$$G_{\phi}(p, q) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{\phi} & \cdots & -s_{\phi} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s_{\phi} & \cdots & c_{\phi} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Let op!  $p \neq q$ .

## Veralgemening van oefening 1

We kunnen de rotatie van oefening 1 veralgemenen voor een  $n$ -bij- $n$  symmetrische matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , i.e.

$$G_\phi(p, q) A G_\phi^T(p, q).$$

Dit geeft hoewel niet hoewel neit exact wat we willen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{pp} & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{np} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{1q} & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{qq} & \cdots & a_{nq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Veralgemening van oefening 1

We kunnen de rotatie van oefening 1 veralgemenen voor een  $n$ -bij- $n$  symmetrische matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , i.e.

$$G_\phi(p, q) A G_\phi^T(p, q).$$

Dit geeft hoewel niet hoewel neit exact wat we willen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & c_\phi a_{1p} - s_\phi a_{1q} & \cdots & s_\phi a_{1p} + c_\phi a_{1q} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_\phi a_{1p} - s_\phi a_{1q} & \cdots & \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{12} & \cdots & c_\phi a_{np} - s_\phi a_{nq} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ s_\phi a_{1p} + c_\phi a_{1q} & \cdots & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{22} & \cdots & s_\phi a_{np} + c_\phi a_{nq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & c_\phi a_{np} - s_\phi a_{nq} & \cdots & s_\phi a_{np} + c_\phi a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$



# Veralgemening van oefening 1

We kunnen de rotatie van oefening 1 veralgemenen voor een  $n$ -bij- $n$  symmetrische matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , i.e.

$$G_\phi(p, q) A G_\phi^T(p, q).$$

Dit geeft hoewel niet hoewel niet exact wat we willen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & c_\phi a_{1p} - s_\phi a_{1q} & \cdots & s_\phi a_{1p} + c_\phi a_{1q} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_\phi a_{1p} - s_\phi a_{1q} & \cdots & \gamma_{11} & \cdots & 0 & \cdots & c_\phi a_{np} - s_\phi a_{nq} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ s_\phi a_{1p} + c_\phi a_{1q} & \cdots & 0 & \cdots & \gamma_{22} & \cdots & s_\phi a_{np} + c_\phi a_{nq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & c_\phi a_{np} - s_\phi a_{nq} & \cdots & s_\phi a_{np} + c_\phi a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

## Het idee achter Jacobi

Laat  $A^{(0)} = A$ . Doe de volgende iteraties:

$$A^{(i+1)} = G_{\phi_i}(p_i, q_i) A^{(i)} G_{\phi_i}(p_i, q_i)$$

**Let op:** de gelijkvormigheidstransformaties veranderen niet de Frobenius norm van  $A$ .

Met een goede keuze van  $(p_i, q_i, \phi_i)$ , is aan te tonen dat:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A^{(i)} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

# Een mogelijke aanpak: elimineer de grootste niet-diagonaal element

## Theorem

*Laat  $p_i^* < q_i^*$  de eigenschap hebben dat:*

$$\left| a_{p_i^* q_i^*}^{(i)} \right| = \max_{k \neq l} \left| a_{kl}^{(i)} \right|.$$

*Kies:*

$$\tan \left( 2\phi^{(i)} \right) = \frac{2a_{p_i^* q_i^*}^{(i)}}{a_{q_i^* q_i^*}^{(i)} - a_{p_i^* p_i^*}^{(i)}}$$

*Dan geldt dat:*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A^{(i)} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

# Een mogelijke aanpak: elimineer de grootste niet-diagonaal element

Proof.

Definieer:

$$\text{off}(A) := \sum_{k \neq l} |a_{kl}|^2$$

We kunnen dan het volgende afleiden:

$$\begin{aligned} \text{off} \left( A^{(i+1)} \right) &= \sum_{\substack{k \neq l \\ k, l \neq p_i^*, q_i^*}} \left| a_{kl}^{(i)} \right|^2 + \\ &2 \cdot \sum_{k=1, k \neq p_i^*, q_i^*}^n \underbrace{\left| c_{\phi_i} a_{kp_i^*}^{(i)} - s_{\phi_i} a_{kq_i^*}^{(i)} \right|^2 + \left| s_{\phi_i} a_{kp_i^*}^{(i)} + c_{\phi_i} a_{kq_i^*}^{(i)} \right|^2}_{= \left| a_{kp_i^*}^{(i)} \right|^2 + \left| a_{kq_i^*}^{(i)} \right|^2} \end{aligned}$$

□

## Een mogelijke aanpak: elimineer de grootste niet-diagonaal element

Proof.

Definieer:

$$\text{off}(A) := \sum_{k \neq l} |a_{kl}|^2$$

We kunnen dan het volgende afleiden:

$$\text{off} \left( A^{(i+1)} \right) = \sum_{k \neq l} \left| a_{kl}^{(i)} \right|^2 - 2 \left| a_{p_i^* q_i^*}^{(i)} \right|^2$$



## Een mogelijke aanpak: elimineer de grootste niet-diagonaal element

Proof.

Definieer:

$$\text{off}(A) := \sum_{k \neq l} |a_{kl}|^2$$

We kunnen dan het volgende afleiden:

$$\begin{aligned} \text{off}\left(A^{(i+1)}\right) &= \text{off}\left(A^{(i)}\right) - 2 \underbrace{\max_{k \neq l} \left|a_{kl}^{(i)}\right|^2}_{\geq \frac{1}{n^2-n} \text{off}\left(A^{(i)}\right)} \\ &\geq \frac{1}{n^2-n} \text{off}\left(A^{(i)}\right) \end{aligned}$$



Een mogelijke aanpak: elimineer de grootste niet-diagonaal element

Proof.

Definieer:

$$\text{off}(A) := \sum_{k \neq l} |a_{kl}|^2$$

We kunnen dan het volgende afleiden:

$$\text{off}\left(A^{(i+1)}\right) \leq \text{off}\left(A^{(i)}\right) - \frac{2}{n^2 - n} \text{off}\left(A^{(i)}\right)$$



Een mogelijke aanpak: elimineer de grootste niet-diagonaal element

Proof.

Definieer:

$$\text{off}(A) := \sum_{k \neq l} |a_{kl}|^2$$

We kunnen dan het volgende afleiden:

$$\text{off}\left(A^{(i+1)}\right) \leq \left(1 - \frac{2}{n^2 - n}\right) \text{off}\left(A^{(i)}\right).$$

