

NLA: Introductie perturbatie theorie eigenwaarden

Nithin Govindarajan

KU Leuven

August 24, 2023

Wat wordt er behandeld?

- ▶ Elementen van Lecture 12, 24, 25, en 26 in Trefethen&Boyd.
- ▶ Extra materiaal: conditiegetal van enkelvoudige eigenwaarden.
- ▶ Een selectie van oefeningen.

Probeer het eerst zelf te oplossen!

“Eigenwaarde problemen = nulpunten van veeltermen”

Omdat eigenwaarden de nulpunten zijn van een specifieke veelterm, zijn deze twee problemen sterk met elkaar verbonden.

Het berekenen van nulpunten van veeltermen.

$$0 = a_0 + a_1x$$

$$x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$$

Het berekenen van nulpunten van veeltermen.

$$0 = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$x_1 = -\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}, \quad x_2 = -\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

Het berekenen van nulpunten van veeltermen.

$$0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Kan algebraïsch opgelost worden met de formules van Cardano en
Tartaglia

Het berekenen van nulpunten van veeltermen.

$$0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

Kan algebraïsch opgelost worden met de formules van Lodovico Ferrari.

Het berekenen van nulpunten van veeltermen.

$$0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

Wat nu?

Abel-Ruffini

Theorem

Er is geen algemene formule om de nulpunten van een veelterm van graad vijf of hoger uit te drukken in termen van zijn coëfficiënten met alleen een eindige hoeveelheid van basis-operaties $(+, -, \times, \div)$ en wortelvormen.

Theorem

Er is geen algemene formule om de nulpunten van een veelterm van graad vijf of hoger uit te drukken in termen van zijn coëfficiënten met alleen een eindige hoeveelheid van basis-operaties $(+, -, \times, \div)$ en wortelvormen.

Consequentie: in tegenstelling tot het oplossen van lineaire systemen, eigenwaarden moeten, in het algemeen, iteratief opgelost worden.

Een slecht idee

Bereken van eigenwaarden van $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

1. Bereken de karakteristieke veelterm in de monomiaal basis:

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n.$$

2. Vind de nultermen van $p(\lambda)$ met “methode X”.

Een slecht idee

$$p(x) = \prod_{i=1}^{20} (x - i) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx^n$$

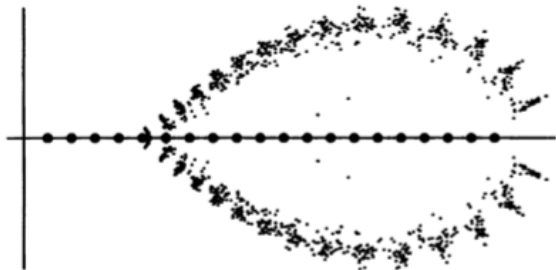


Figure 12.1. *Wilkinson's classic example of ill-conditioning. The large dots are the roots of the unperturbed polynomial (12.8). The small dots are the superimposed roots in the complex plane of 100 randomly perturbed polynomials with coefficients defined by $\bar{a}_k = a_k(1 + 10^{-10}r_k)$, where r_k is a number from the normal distribution of mean 0 and variance 1.*

De gewoonlijke aanpak

Eigenwaarden worden meestal bepaald via eigenwaarde-onthullende decomposities (Schur, Jordan, etc.)

Oefening 1

Bewijs de stelling van Gershgorin. Gegeven $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definieer de zogehete Gershgorin cirkels:

$$D_i := \left\{ x \in \mathbb{C} : |x - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right\}.$$

Voor elke $\lambda \in \lambda(A)$ geldt $\lambda \in D_i$ voor een bepaald $i = 1, \dots, n$.

Oefening 1 - antwoord

Laat $v \neq 0$ een corresponderende eigenvector zijn van eigenwaarde λ . Kies een $i \in \{1, \dots, n\}$ met de eigenschap:

$$|v_i| = \max_{j=1, \dots, n} |v_j|.$$

Oefening 1 - antwoord

Laat $v \neq 0$ een corresponderende eigenvector zijn van eigenwaarde λ . Kies een $i \in \{1, \dots, n\}$ met de eigenschap:

$$|v_i| = \max_{j=1, \dots, n} |v_j|.$$

Merk nu het volgende op:

$$\lambda v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$$

Oefening 1 - antwoord

Laat $v \neq 0$ een corresponderende eigenvector zijn van eigenwaarde λ . Kies een $i \in \{1, \dots, n\}$ met de eigenschap:

$$|v_i| = \max_{j=1, \dots, n} |v_j|.$$

Merk nu het volgende op:

$$(\lambda - a_{ii})v_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}v_j$$

Oefening 1 - antwoord

Laat $v \neq 0$ een corresponderende eigenvector zijn van eigenwaarde λ . Kies een $i \in \{1, \dots, n\}$ met de eigenschap:

$$|v_i| = \max_{j=1, \dots, n} |v_j|.$$

Merk nu het volgende op:

$$|\lambda - a_{ii}| |v_i| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| |v_j|$$

Oefening 1 - antwoord

Laat $v \neq 0$ een corresponderende eigenvector zijn van eigenwaarde λ . Kies een $i \in \{1, \dots, n\}$ met de eigenschap:

$$|v_i| = \max_{j=1, \dots, n} |v_j|.$$

Merk nu het volgende op:

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \frac{|v_j|}{|v_i|}$$

Oefening 1 - antwoord

Laat $v \neq 0$ een corresponderende eigenvector zijn van eigenwaarde λ . Kies een $i \in \{1, \dots, n\}$ met de eigenschap:

$$|v_i| = \max_{j=1, \dots, n} |v_j|.$$

Merk nu het volgende op:

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

Een verscherping van Gershgorin

Als $D_i \cap D_j = \emptyset$ voor elke $i \neq j$, dan bezit elke Gershgorin cirkel precies één eigenwaarde $\lambda \in \lambda(A)$.

Een verscherping van Gershgorin

Als $D_i \cap D_j = \emptyset$ voor elke $i \neq j$, dan bezit elke Gershgorin cirkel precies één eigenwaarde $\lambda \in \lambda(A)$.

Proof.

Kijk naar de eigenwaarden van:

$$B(t) = (t - 1) \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} + tA$$

Voor $t = 0$ zijn de eigenwaarden exact a_{jj} . Het feit dat de eigenwaarden continu veranderen als een functie van t garandeert dat elk Gershgorin cirkel één eigenwaarde zal bevatten. \square

Eigenwaarde-onthullende decomposities en Gershgorin

Een interessante consequentie van Gershgorin:

- ▶ Stel dat we een matrix $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bijna diagonalizeert met een soortgelijke transformatie:

$$D + F = V^{-1}AV, \quad \text{met } \|F\| \text{ heel "klein".}$$

- ▶ De stelling Gershgorin geeft aan dat de diagonale waarden van $V^{-1}AV$ goede benaderingen zijn van de eigenwaarden.

Hoe toon je aan dat de Schur decompositie ook eigenwaarde-onthullend is?

Conditionering van het probleem.

Hoe gevoelig zijn eigenwaarden (en de daarbijhorende
eigenvectoren) voor kleine perturbaties in $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$?

Laten we kijken naar een aantal *interessante* resultaten.

Conditiegetal van enkelvoudige eigenwaarden

Gegeven is een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Laten we kijken naar perturbaties van de vorm:

$$A(\epsilon) = A + \epsilon E, \quad \|E\|_2 = 1.$$

Stel dat $\lambda_i \in \lambda(A)$ enkelvoudig (i.e. $d_{\lambda_i} = 1$) is.

Conditiegetal van enkelvoudige eigenwaarden

Gegeven is een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Laten we kijken naar perturbaties van de vorm:

$$A(\epsilon) = A + \epsilon E, \quad \|E\|_2 = 1.$$

Stel dat $\lambda_i \in \lambda(A)$ enkelvoudig (i.e. $d_{\lambda_i} = 1$) is.

Consequentie van impliciete functiestelling:

Er bestaat een $\delta > 0$ zodat voor de domein met $|\epsilon| \leq \delta$, de eigenwaarde λ_i expliciet beschreven kan worden in termen van ϵ , i.e. $\lambda_i(\epsilon)$. Daarbovenop is $\lambda_i(\epsilon)$ differentieerbaar op $\epsilon = 0$.

Conditiegetal van enkelvoudige eigenwaarden

Gegeven is een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Laten we kijken naar perturbaties van de vorm:

$$A(\epsilon) = A + \epsilon E, \quad \|E\|_2 = 1.$$

Stel dat $\lambda_i \in \lambda(A)$ enkelvoudig (i.e. $d_{\lambda_i} = 1$) is.

De arakteristieke veelterm van $A(\epsilon)$ neemt de vorm:

$$a_0(\epsilon) + a_1(\epsilon)\lambda + \dots + a_n(\epsilon)\lambda^n = f(\lambda, \epsilon) = 0$$

Conditiegetal van enkelvoudige eigenwaarden

Gegeven is een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Laten we kijken naar perturbaties van de vorm:

$$A(\epsilon) = A + \epsilon E, \quad \|E\|_2 = 1.$$

Stel dat $\lambda_i \in \lambda(A)$ enkelvoudig (i.e. $d_{\lambda_i} = 1$) is.

Herschrijf de linkerkant met behulp van veelterm deling:

$$(\lambda - \lambda_i)(b_0(\epsilon) + \dots + b_{n-1}(\epsilon))\lambda^{n-1} + r(\epsilon) = f(\lambda, \epsilon) = 0$$

Conditiegetal van enkelvoudige eigenwaarden

Gegeven is een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Laten we kijken naar perturbaties van de vorm:

$$A(\epsilon) = A + \epsilon E, \quad \|E\|_2 = 1.$$

Stel dat $\lambda_i \in \lambda(A)$ enkelvoudig (i.e. $d_{\lambda_i} = 1$) is.

Toon aan dat $\frac{\partial f(\lambda_i, 0)}{\partial \lambda} \neq 0 \dots$

Conditiegetal van enkelvoudige eigenwaarden

Gegeven is een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Laten we kijken naar perturbaties van de vorm:

$$A(\epsilon) = A + \epsilon E, \quad \|E\|_2 = 1.$$

Stel dat $\lambda_i \in \lambda(A)$ enkelvoudig (i.e. $d_{\lambda_i} = 1$) is.

We hebben de impliciete vergelijking:

$$(A + \epsilon E)x(\epsilon) = \lambda_i(\epsilon)x(\epsilon)$$

waarbij $x(\epsilon)$ een eenheidsvector is.

Conditiegetal van enkelvoudige eigenwaarden

Gegeven is een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Laten we kijken naar perturbaties van de vorm:

$$A(\epsilon) = A + \epsilon E, \quad \|E\|_2 = 1.$$

Stel dat $\lambda_i \in \lambda(A)$ enkelvoudig (i.e. $d_{\lambda_i} = 1$) is.

Differentieren en evalueren op $\epsilon = 0$ leidt tot:

$$A \frac{dx(0)}{d\epsilon} + Ex = \frac{d\lambda_i(0)}{d\epsilon} x + \lambda_i \frac{dx(0)}{d\epsilon}$$

Conditiegetal van enkelvoudige eigenwaarden

Gegeven is een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Laten we kijken naar perturbaties van de vorm:

$$A(\epsilon) = A + \epsilon E, \quad \|E\|_2 = 1.$$

Stel dat $\lambda_i \in \lambda(A)$ enkelvoudig (i.e. $d_{\lambda_i} = 1$) is.

Laat $y^* A = y^* \lambda_i$ met $\|y\|_2 = 1$, en vermenigvuldig links met y^* vanuit links:

$$y^* E x = \frac{d\lambda_i(0)}{d\epsilon} y^* x$$

Conditiegetal van enkelvoudige eigenwaarden

Gegeven is een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Laten we kijken naar perturbaties van de vorm:

$$A(\epsilon) = A + \epsilon E, \quad \|E\|_2 = 1.$$

Stel dat $\lambda_i \in \lambda(A)$ enkelvoudig (i.e. $d_{\lambda_i} = 1$) is.

Herschrijf:

$$\left| \frac{d\lambda_i(0)}{d\epsilon} \right| = \frac{|y^* E x|}{|y^* x|} \leq \frac{1}{|y^* x|}$$

Let op, $|y^* E x| \leq \|y\|_2 \|E x\|_2 \leq 1$ volgt uit Cauchy-Schwartz.

Conditiegetal van enkelvoudige eigenwaarden

Gegeven is een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Laten we kijken naar perturbaties van de vorm:

$$A(\epsilon) = A + \epsilon E, \quad \|E\|_2 = 1.$$

Stel dat $\lambda_i \in \lambda(A)$ enkelvoudig (i.e. $d_{\lambda_i} = 1$) is.

Kies $E = yx^*$, dan hebben we exact $|y^*Ex| = 1$. Definieer:

$$k(\lambda_i; A) := \frac{1}{|y^*x|}$$

Conditiegetal van enkelvoudige eigenwaarden

Gegeven is een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Laten we kijken naar perturbaties van de vorm:

$$A(\epsilon) = A + \epsilon E, \quad \|E\|_2 = 1.$$

Stel dat $\lambda_i \in \lambda(A)$ enkelvoudig (i.e. $d_{\lambda_i} = 1$) is.

Huiswerk.

$k(\lambda_i; A)$ is het (absolute) conditiegetal van $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Laat dit zien vanuit de formele definities.

Conditiegetal van meervoudige eigenwaarden

De kwestie van conditiegetal voor eigenwaarden $\lambda_i \in \mathbb{C}$ met algebraïsche multipliciteit $d_{\lambda_i} \geq 2$ zit wat complexer in elkaar...

Neem het volgende voorbeeld:

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De eigenwaarden zijn $\lambda(A(\epsilon)) = \{1 + \sqrt{\epsilon a}, 1 - \sqrt{\epsilon a}\}$. Observeer dat $\sqrt{\epsilon a}$ niet differentieerbaar is op $\epsilon = 0$. Het conditiegetal is “oneindig”.

Oefening 2

Gegeven een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, bewijs de volgende stelling:

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Leftrightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

oefening 2 - antwoord

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Rightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

$$(A + E)v = zv, \quad \|v\|_2 = 1$$

oefening 2 - antwoord

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Rightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

$$(zI - A)v = Ev$$

oefening 2 - antwoord

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Rightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

$$\|(zI - A)v\|_2 = \|Ev\|_2$$

oefening 2 - antwoord

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Rightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

$$\sigma_n(zI - A) \leq \|(zI - A)v\|_2 = \|Ev\|_2 \leq \|E\|_2$$

oefening 2 - antwoord

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Rightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

$$\sigma_n(zI - A) \leq \epsilon$$

oefening 2 - antwoord

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Rightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

$$\frac{1}{\sigma_n(zI - A)} \geq \epsilon^{-1}$$

oefening 2 - antwoord

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Rightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

$$\sigma_1((zI - A)^{-1}) \geq \epsilon^{-1}$$

oefening 2 - antwoord

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Rightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

oefening 2 - antwoord

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Leftrightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

oefening 2 - antwoord

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Leftrightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

$$\sigma_n(zI - A) \leq \epsilon$$

oefening 2 - antwoord

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Leftrightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

Kies eenheidsvector v zodat $\|(zI - A)v\| = \sigma_n(zI - A)$, dan is:

$$E := (zI - A)vv^*, \quad \|E\|_2 \leq \epsilon$$

oefening 2 - antwoord

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Leftrightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

$$(zI - A)v = Ev, \quad \|E\|_2 \leq \epsilon$$

oefening 2 - antwoord

$z \in \lambda(A + E)$ voor een bepaalde $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met $\|E\|_2 \leq \epsilon$

\Leftrightarrow

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

$$(A + E)v = zv, \quad \|E\|_2 \leq \epsilon$$

Oefening 3

Bewijs de stelling van *Bauer-Fike*. Gegeven een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die diagonaliseerbaar is, i.e. $A = V\Lambda V^{-1}$, en gegeven een verstoring op die matrix $\hat{A} = A + E$, met $\|E\|_2 \leq \epsilon$, laat zien dat:

$$\min_{\mu \in \lambda(A)} |\lambda - \mu| \leq K_2(V)\epsilon, \quad K_2(V) := \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2$$

voor elke $\lambda \in \lambda(\hat{A})$.

Hint. Gebruik het resultaat van de vorige oefening!

oefening 3 - antwoord

Pas de stelling van vorige oefening toe:

$$\lambda \in \lambda(\hat{A}) \Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

oefening 3 - antwoord

Pas de stelling van vorige oefening toe:

$$\lambda \in \lambda(\hat{A}) \Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

En herschrijf:

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

oefening 3 - antwoord

Pas de stelling van vorige oefening toe:

$$\lambda \in \lambda(\hat{A}) \Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

En herschrijf:

$$\|(\lambda VV^{-1} - VDV^{-1})^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

oefening 3 - antwoord

Pas de stelling van vorige oefening toe:

$$\lambda \in \lambda(\hat{A}) \Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

En herschrijf:

$$\|V^{-1}(\lambda I - D)^{-1}V\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

oefening 3 - antwoord

Pas de stelling van vorige oefening toe:

$$\lambda \in \lambda(\hat{A}) \Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

En herschrijf:

$$\|V\|_2 \|V^{-1}\|_2 \|(\lambda I - D)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

oefening 3 - antwoord

Pas de stelling van vorige oefening toe:

$$\lambda \in \lambda(\hat{A}) \Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

En herschrijf:

$$\max_{\mu \in \lambda(A)} \frac{\|V\|_2 \|V^{-1}\|_2}{|\lambda - \mu|} \geq \epsilon^{-1}$$

oefening 3 - antwoord

Pas de stelling van vorige oefening toe:

$$\lambda \in \lambda(\hat{A}) \Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$$

En herschrijf:

$$\min_{\mu \in \lambda(A)} |\lambda - \mu| \leq K_2(V)\epsilon, \quad K_2(V) := \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2$$

Nog een paar vragen...

- ▶ Wat zijn de consequenties van Bauer-Fike op normale matrices?
- ▶ Wat kunnen we zeggen over conditionering van normale matrices die eigenwaarden beschikken met algebraïsche multipliciteit groter dan 1?

Huiswerk

Doe het volgende experiment in Matlab/Python/Julia:

- ▶ Kies een willekeurige diagonale matrix $D \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$.
- ▶ Kies een willekeurige inverteerbare matrix $V \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ en vorm $A = VDV^{-1}$.
- ▶ Stel $A^{(0)} = A$ en doe de volgende iteratie:

$$A^{(k+1)} = R^{(k)}Q^{(k)}, \quad A^{(k)} = Q^{(k)}R^{(k)}$$

- ▶ Wat neem je waar?