

NLA: LU factorisatie

Nithin Govindarajan

KU Leuven

August 24, 2023

Wat wordt er behandeld?

- ▶ Trefethen&Bau - Lecture 20: Gaussian elimination
 - ▶ De redenering / methode / principe aangaande Gauss-eliminatie dient gekend te zijn maar de “general formulas” op p. 150-151 (bovenste helft) niet.
 - ▶ De tweede paragraaf van “Solution of $Ax=b$ by LU Factorization” valt weg.
- ▶ Trefethen&Bau - Lecture 21: Pivoting
 - ▶ De sectie “ $PA=LU$ Factorization and a Third Stroke of Luck”, p. 159-160, en de sectie “Complete Pivoting”, p. 161, behoren niet tot de leerstof.
- ▶ Een selectie van oefeningen:

Probeer het eerst zelf te oplossen!

LU factorisatie

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

$Ax = b$ oplossen met behulp van LU

De stappen zijn:

1. Bereken $A = LU$.
2. Los op $Ly = b$.
3. Los op $Ux = y$.

Triangulaire systemen zijn makkelijk oplosbaar

In het geval bovendriehoeksmatrices:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Achterwaardse substitutie:

$$x_p = \frac{1}{a_{pp}} \left(b_p - \sum_{k=p+1}^n a_{pk} x_k \right), \quad p = 1, \dots, m.$$

Achterwaards substitutie is achterwaards stabiel, zie lecture 17 in Trefethen&Bau.

Gauss-eliminatie

Gauss-eliminatie:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

Gauss-eliminatie in lineaire-algebra notatie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Gauss-eliminatie

Gauss-eliminatie:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

Elimineer x_1 in de tweede en derde vergelijking...

Gauss-eliminatie in lineaire-algebra notatie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Gauss-eliminatie

Gauss-eliminatie:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \\ & & & -2x_2 & - & 8x_3 & = & -7 \\ & & & 6x_2 & + & 6x_3 & = & 2 \end{array}$$

Gauss-eliminatie in lineaire-algebra notatie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Gauss-eliminatie

Gauss-eliminatie:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \\ & & -2x_2 & - & 8x_3 & = & -7 \\ & & 6x_2 & + & 6x_3 & = & 2 \end{array}$$

Elimineer x_2 in de derde vergelijking...

Gauss-eliminatie in lineaire-algebra notatie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Gauss-eliminatie

Gauss-eliminatie:

$$\begin{array}{rrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \\ & & -2x_2 & - & 8x_3 & = & -7 \\ & & & & 30x_3 & = & 19 \end{array}$$

Gauss-eliminatie in lineaire-algebra notatie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Waar is de L en U ?

Nogmaals ons voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Waar is de L en U ?

Nogmaals ons voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Waar is de L en U ?

Nogmaals ons voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Waar is de L en U ?

Nogmaals ons voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Waar is de L en U ?

Nogmaals ons voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Waar is de L en U ?

Nogmaals ons voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Waar is de L en U ?

Nogmaals ons voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Waar is de L en U ?

Nogmaals ons voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Waar is de L en U ?

Daar is onze L en U ...

In het algemeen...

De LU factorisatie wordt in m stappen berekend:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

In het algemeen...

De LU factorisatie wordt in m stappen berekend:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

In het algemeen...

De LU factorisatie wordt in m stappen berekend:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \color{red}{a_{22}^{(2)}} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

In het algemeen...

De LU factorisatie wordt in m stappen berekend:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{bmatrix}$$

In het algemeen...

De LU factorisatie wordt in m stappen berekend:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{n3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(4)} \end{bmatrix}$$

In het algemeen...

De LU factorisatie wordt in m stappen berekend:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{n3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

LU factorisatie is niet altijd mogelijk!

Voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Let op dat de matrix hierboven wel inverteerbaar is!

Oefening 1

Stel $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ is niet-singulier. Toon aan dat A een LU factorisatie heeft als, en alleen als, voor elke $1 \leq k \leq m$, de sub-matrices $A(1:k, 1:k)$ ook niet singulier is.

Toelichting: Wat er bedoelt wordt met $A(1:k, 1:k)$:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \textcolor{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cc|cc} \textcolor{red}{a_{11}} & \textcolor{red}{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ \textcolor{red}{a_{21}} & \textcolor{red}{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcolor{red}{a_{11}} & \textcolor{red}{a_{12}} & \textcolor{red}{a_{13}} & a_{14} \\ \textcolor{red}{a_{21}} & \textcolor{red}{a_{22}} & \textcolor{red}{a_{23}} & a_{24} \\ \textcolor{red}{a_{31}} & \textcolor{red}{a_{32}} & \textcolor{red}{a_{33}} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cccc} \textcolor{red}{a_{11}} & \textcolor{red}{a_{12}} & \textcolor{red}{a_{13}} & \textcolor{red}{a_{14}} \\ \textcolor{red}{a_{21}} & \textcolor{red}{a_{22}} & \textcolor{red}{a_{23}} & \textcolor{red}{a_{24}} \\ \textcolor{red}{a_{31}} & \textcolor{red}{a_{32}} & \textcolor{red}{a_{33}} & \textcolor{red}{a_{34}} \\ \textcolor{red}{a_{41}} & \textcolor{red}{a_{42}} & \textcolor{red}{a_{43}} & \textcolor{red}{a_{44}} \end{array} \right]$$

Oefening 1 - antwoord

- ▶ Gauss-eliminatie op een matrix heeft geen invloed op de determinant.
- ▶ De sleutel tot het antwoord zit in de volgende observatie:

$$\det A = \det L \cdot \det U = 1 \cdot \prod_{k=1}^n u_{kk}.$$

- ▶ Om Gauss-eliminatie onverhinderd uit te laten voeren, vereist: $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, met $a_{kk}^{(k)}$ gedefinieerd in slide 8.
- ▶ Maar we weten dat:

$$\det A(1:k, 1:k) = \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k)} \neq 0.$$

Oefening 2

Stel dat $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ voldoet aan de conditie van oefening 1. Verder, meem aan dat A een bovenbandbreedte heeft van p en onderbandbreedte van q . Bijvoorbeeld voor $p = q = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ddots & a_{(n-2)n} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & & & a_{n(n-2)} & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Wat kan er gezegd worden over de structuur van L en U in de LU factorisatie?

Oefening 2 - antwoord

Het is makkelijk aan te tonen dat de L en U het structuur van A overnemen, en ook bandmatrices zullen zijn.

Dus voor $p = q = 2$, is de L gelijk aan:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & l_{42} & l_{43} & 1 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & l_{n(n-2)} & l_{n(n-1)} & 1 \end{bmatrix}$$

Oefening 2 - antwoord

Het is makkelijk aan te tonen dat de L en U het structuur van A overnemen, en ook bandmatrices zullen zijn.

Dus voor $p = q = 2$, en de U is gelijk aan:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & 0 & & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & \ddots & u_{(n-2)n} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & u_{(n-1)n} \\ 0 & & & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Oefening 3

Stel $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ en schrijf $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ met A_{11} een $n \times n$ matrix en A_{22} een $(m - n) \times (m - n)$ matrix. Neem aan dat A voldoet aan de conditie van oefening 1. Het volgende is makkelijk aan te tonen:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ noemt men het “Schur complement”.

Laat zien dat (1) het zelfde is als het toepassen van Gauss-eliminatie om block A_{21} weg te elimineren!

Oefening 3 - antwoord

Als we Gauss-eliminatie toepassen om block A_{21} weg te elimineren, dan krijgen we een decompositie van de vorm:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

Oefening 3 - antwoord

Als we Gauss-eliminatie toepassen om block A_{21} weg te elimineren, dan krijgen we een decompositie van de vorm:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ BA_{11} & BA_{12} + S \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oefening 3 - antwoord

Als we Gauss-eliminatie toepassen om block A_{21} weg te elimineren, dan krijgen we een decompositie van de vorm:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ BA_{11} & BA_{12} + S \end{bmatrix} \end{aligned}$$

We hebben dus de vergelijkingen:

$$A_{21} = BA_{11}, \quad BA_{11}A_{12} + S = A_{22}.$$

Oefening 3 - antwoord

Als we Gauss-eliminatie toepassen om block A_{21} weg te elimineren, dan krijgen we een decompositie van de vorm:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ BA_{11} & BA_{12} + S \end{bmatrix}\end{aligned}$$

We hebben dus de vergelijkingen:

$$A_{21} = BA_{11}, \quad BA_{11}A_{12} + S = A_{22}.$$

Deze vergelijkingen hebben een unieke oplossing:

$$B = A_{21}A_{11}^{-1}, \quad S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

Numerieke issues met LU factorisatie

Neem de volgende voorbeeld:

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Met exacte berekingen:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{20} \end{bmatrix}$$

Met afrondingsfouten:

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{U} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{bmatrix}$$

Observatie: *De berekende \hat{L} , \hat{U} zitten dicht op de ware L , U ...*

Numerieke issues met LU factorisatie

Neem de volgende voorbeeld:

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Met exacte berekingen:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & \textcolor{red}{1} \end{bmatrix}$$

Met afrondingsfouten:

$$\hat{A} = \hat{L}\hat{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & \textcolor{red}{0} \end{bmatrix}$$

Observatie: *Maar \hat{A} en A zijn ver van elkaar verwijderd*

Oplossing: Pivoteren

- ▶ Grote afwijkingen in \hat{A} en A worden veroorzaakt door het gebruik van kleine spilelement¹.
- ▶ Dit kan (gedeeltelijk) gemitigeerd worden door rijwisseling en/of kolomwisseling.
- ▶ In het algemeen leidt dit tot de LU decompositie:

$$PAQ = LU$$

- ▶ Wij beperken ons tot alleen rijwisselingen ($PA = LU$).
- ▶ Stabiliteit van LU is een complexe zaak. Voor de geïnteresseerden, zie Trefethen&Bau - lecture 22.

¹In het extreme geval is het spilelement nul, waarbij de LU decompositie zelfs niet eens meer gevormd kan worden!

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Toelichting. Voer een rijwisseling uit om 8 naar de (1,1)-positie te brengen.

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = P_1^T \left(P_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P_1^T \right) \left(P_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \right)$$

Toelichting. Kies daarvoor de permutatie matrix:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = P_1^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Toelichting. Dit brengt 8 naar de gewenste positie.

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = P_1^T \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_1 \right) \left(L_1^{-1} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \right)$$

Toelichting. Voer nu de benodigde rijwisselingen uit met:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = P_1^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{8} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{8} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{6}{8} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix}$$

Toelichting. We hebben nu de eerste stap van Gauss-eliminatie afgerond. Voer een rijwisseling uit om $\frac{7}{4}$ naar de (2,2) positie te brengen.

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = (P_2 P_1)^T \left(P_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P_2^T \right) \left(P_2 \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix} \right)$$

Toelichting. Kies daarvoor de permutatie matrix:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = (P_2 P_1)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{8} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{8} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{8} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Toelichting. Dit brengt $\frac{7}{4}$ naar de gewenste positie. Merk ook de veranderingen in de “L matrix” op!

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = (P_2 P_1)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{8} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{8} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{8} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Toelichting. Dit brengt $\frac{7}{4}$ naar de gewenste positie. Merk ook de veranderingen in onze “L matrix” op!

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = (P_2 P_1)^T \left(\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_2 \end{bmatrix} \left(L_2^{-1} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \right) \right)$$

Toelichting. Kies hiervoor:

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = (P_2 P_1)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{8} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{8} & -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{8} & -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

Toelichting. We hebben nu de tweede stap van Gauss-eliminatie uitgevoerd. Voer een laatste rijwisseling uit om $-\frac{6}{7}$ naar de (3,3) positie te brengen.

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = (P_3 P_2 P_1)^T \left(P_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{8} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{8} & -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix} P_3^T \right) \left(P_3 \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{7}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \right)$$

Toelichting. Kies hiervoor:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = (P_3 P_2 P_1)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{8} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{8} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ \frac{2}{8} & -\frac{3}{7} & 0 & 1 \\ \frac{2}{8} & -\frac{3}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

Toelichting. Dit brengt $-\frac{6}{7}$ naar de gewenste positie. Merk ook de veranderingen in de “L matrix” op!

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = (P_3 P_2 P_1)^T \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ 8 & -\frac{3}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix} L_3 \right) \left(L_3^{-1} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \right)$$

Toelichting. Pas nu de laatste Gauss-eliminatie stap met

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Pivoteren: een voorbeeld

$$A = (P_3 P_2 P_1)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{8} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{8} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ \frac{8}{8} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Toelichting. We zijn bijna klaar! Definieer $P = P_3 P_2 P_1$.

Pivoteren: een voorbeeld

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{8} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{8} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ \frac{2}{8} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Toelichting. Tada!

Oefening 4

Een matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ is *streng kolom diagonaal dominant* als:

$$|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{jk}|, \quad k = 1, \dots, m.$$

Toon aan dat rijwisselingen niet nodig zijn voor streng kolom diagonaal dominant matrices.

Oefening 4 - antwoord

- ▶ Het is vanzelfsprekend dat de eerste spel-element op de (1,1)-positie zit...
- ▶ Het is voldoende als we kunnen aantonen dat de Schur complement:

$$S := A_{22} - \frac{1}{a_{11}} A_{21} A_{12}^T$$

ook kolom diagonal dominant is. Dit volgt uit inductie.

- ▶ Dus:

$$\sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} |s_{jk}| < |s_{kk}|$$

met $s_{jk} := a_{(j+1)(k+1)} - \frac{1}{a_{11}} a_{(j+1)1} a_{1(k+1)}$

Oefening 4 - antwoord

Laten we dit bewijzen:

$$\sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} |s_{jk}| = \sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} \left| a_{(j+1)(k+1)} - \frac{1}{a_{11}} a_{(j+1)1} a_{1(k+1)} \right|$$

Oefening 4 - antwoord

Laten we dit bewijzen:

$$\sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} |s_{jk}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} |a_{(j+1)(k+1)}| + \left| \frac{a_{1(k+1)}}{a_{11}} \right| \sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} |a_{(j+1)1}|$$

Toelichting. Pas de driehoeksongelijkheid toe.

Oefening 4 - antwoord

Laten we dit bewijzen:

$$\sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} |s_{jk}| \leq |a_{(k+1)(k+1)}| - |a_{1(k+1)}| + \left| \frac{a_{1(k+1)}}{a_{11}} \right| \sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} |a_{(j+1)1}|$$

Toelichting. Omdat A kolom diagonaal dominant is, weten we dat:

$$|a_{1(k+1)}| + \sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} |a_{(j+1)(k+1)}| \leq |a_{(k+1)(k+1)}|.$$

Oefening 4 - antwoord

Laten we dit bewijzen:

$$\sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} |s_{jk}| \leq |a_{(k+1)(k+1)}| - |a_{1(k+1)}| + \left| \frac{a_{1(k+1)}}{a_{11}} \right| (|a_{11}| - |a_{(k+1)1}|)$$

Toelichting. Voor soortgelijke redenen geldt dat:

$$|a_{(k+1)1}| + \sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} |a_{(j+1)1}| \leq |a_{11}|.$$

Oefening 4 - antwoord

Laten we dit bewijzen:

$$\sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} |s_{jk}| \leq |a_{(k+1)(k+1)}| - \left| \frac{a_{1(k+1)}}{a_{11}} \right| |a_{(k+1)1}|$$

Oefening 4 - antwoord

Laten we dit bewijzen:

$$\sum_{j=1, j \neq k}^{n-1} |s_{jk}| \leq |a_{(k+1)(k+1)}| - \left| \frac{a_{1(k+1)}}{a_{11}} \right| |a_{(k+1)1}| = s_{kk}$$

Q.E.D.