

NLA: Eigenwaarden problemen

Nithin Govindarajan

KU Leuven

August 24, 2023

Wat wordt er behandeld?

- ▶ Trefethen&Bau - Lecture 24: Eigenvalue problems
 - ▶ Het deel “Determinant and Trace”, p. 181-186, moet in de vingers zitten maar wordt niet op zich bevraagd.
- ▶ Extra materiaal: normale matrices, relatie tussen Schur decompositie en eigen-decomposities.
- ▶ Een selectie van oefeningen:

Probeer het eerst zelf te oplossen!

Eigenwaardes en eigenvectoren

Een vector $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ is een *eigenvector* voor de een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met *eigenwaarde* $\lambda \in \mathbb{C}$ als:

$$Av = \lambda v.$$

Het Karakteristieke veelterm

- ▶ Een eigenvector $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ van $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ met eigenwaarde λ voldoet aan:

$$(\lambda I - A)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v \in \text{Null}(\lambda I - A) := E(\lambda, A)$$

- ▶ $\lambda I - A$ beschikt tot een niet triviale nulruimte. Dus:

$$p_n(\lambda) := \det(\lambda I - A) = 0. \quad (1)$$

- ▶ $p_n(\lambda)$ is een graad n veel term, genaamd het *karakteristieke veelterm*.
- ▶ De *hoofdstelling van de algebra* garandeert n eigenwaarden λ_i (mogelijk meervoudig), i.e. $p_n(\lambda)$ kan worden ontbonden in:

$$p_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_{\lambda_1}} (\lambda - \lambda_2)^{d_{\lambda_2}} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{d_{\lambda_m}} \quad (2)$$

Algebraïsche en geometrische multipliciteit

- ▶ De algebraïsche multipliciteit d_{λ_i} is de multipliciteit van λ_i in (2)
- ▶ De geometrische multipliciteit is gelijk aan $\dim E(\lambda_i, A)$.
- ▶ Relatie tussen algebraïsche en geometrische multipliciteit:

$$1 \leq \dim E(\lambda_i, A) \leq d_{\lambda_i}$$

- ▶ Voorbeeld:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Voor beide matrices is de algebraïsche multipliciteit gelijk aan 3, maar $\dim E(2, A) = 3$ en $\dim E(2, B) = 1$.

Bovendriehoeksmatrices, gelijksoortige matrices

- Voor een bovendriehoeksmatrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zijn de eigenwaarden¹ makkelijk af te lezen:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Een gelijkvormigheidstransformatie $XAX^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ op een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ houdt de eigenwaarden onveranderd. Dit volgt uit:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - XAX^{-1}) &= \det(\lambda XX^{-1} - XAX^{-1}) \\ &= \det(X(\lambda I - A)X^{-1}) \\ &= \det(X) \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \det(X^{-1}) \\ &= \det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

¹Merk op dat, in tegenstelling tot (2), de eigenwaarden hier geteld worden op basis van hun algebraïsche multipliciteit!

Schur decompositie

De belangrijkste stelling voor deze les...

Theorem (Schur decompositie)

Elke matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kan ontbonden worden in:

$$A = QTQ^*$$

met $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ een bovendriehoeksmatrix en $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ een unitaire matrix.

Schur decompositie (bewijs)

Proof.

Gegeven een eigenvector $v \in \mathbb{C}^n$ met verwante eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{C}$ en $\|v\|_2 = 1$, construeer een unitaire matrix $\hat{Q} = \begin{bmatrix} v & U \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}\hat{Q}^* A \hat{Q} &= \begin{bmatrix} v^* A v & v^* A U \\ U^* A v & U^* A U \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda \|v\|_2^2 & v^* A U \\ \lambda U^* v & U^* A U \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda \|v\|_2^2 & * \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Pas nu inductie toe op $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, i.e. $\tilde{Q}^* \tilde{A} \tilde{Q} = \tilde{T}$. Dit leidt tot:

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & \tilde{Q}^* \end{bmatrix} \hat{Q}^* A \hat{Q} \begin{bmatrix} 1 & \\ & \tilde{Q} \end{bmatrix} = T.$$



Oefening 1

Een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ is normaal als $A^*A = AA^*$. Toon aan dat bovendriehoeksmatrix normaal is als, en alleen als het ook een diagonale matrix is.

Voorbeelden van normale matrices:

- ▶ Unitaire matrices: $A^*A = I$.
- ▶ Hermitische matrices: $A = A^*$.

Oefening 1 - antwoord

We kunnen weer gebruik maken van het “inductie trucje”. We doen alleen de eerste stap voor.

Schrijf $A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$. We hebben dan:

$$AA^* = \begin{bmatrix} |a_{11}|^2 + A_{12}A_{12}^* & A_{12}A_{22}^* \\ A_{22}A_{12}^* & A_{22}A_{22}^* \end{bmatrix}, A^*A = \begin{bmatrix} |a_{11}|^2 & a_{11}^*A_{12} \\ a_{11}A_{12}^* & A_{12}^*A_{12} + A_{22}^*A_{22} \end{bmatrix}.$$

Vanuit de (1,1)-positie leiden we af dat:

$$A_{12}A_{12}^* = \sum_{k=2}^n |a_{1k}|^2 = 0$$

Dit kan als $A_{12} = 0$.

Spectraalstelling voor normale matrices

Theorem (Spectraalstelling - normale matrices)

Voor elke normale matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bestaat er een unitaire matrix $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zodat:

$$A = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} Q^*.$$

Spectraalstelling voor normale matrices

Theorem (Spectraalstelling - normale matrices)

Voor elke normale matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bestaat er een unitaire matrix $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zodat:

$$A = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} Q^*.$$

Proof.

We weten dat $A = QTQ^*$, met T een bovendriehoeksmatrix. Maar T is ook een normale matrix:

$$TT^* = Q^*AQQ^*A^*Q = Q^*AA^*Q = Q^*A^*AQ = Q^*A^*QQ^*AQ = T^*T$$

Gebruik nu het resultaat in oefening 1.



Oefening 2

Gegeven $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Gebruik de Schur decompositie om aan te tonen dat:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$$

als $\rho := \max_{j=1, \dots, n} |\lambda_j| < 1$,

Hint. Maak gebruik van de binomiale stelling van Newton.

Oefening 2 - antwoord

Volgt uit de deductie:

$$\begin{aligned}\|A^k\| &= \|QT^kQ^*\| \\ &\leq \|Q\|^2 \|T^k\| \\ &= \|Q\|^2 \|(N + D)^k\|, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= \|Q\|^2 \left\| \sum_{l=0}^{n-1} b_k N^l D^{k-l} \right\|, \quad k \geq n \\ &\leq \|Q\|^2 \sum_{l=0}^{n-1} |b_k| \|N^l\| \rho^{k-l}, \quad k \geq n\end{aligned}$$

Eigendecomposities van niet-normale matrices

Gegeven de Schur decompositie, zijn we maar een paar algebraïsche stappen verwijderd van de eigen-decompositie (als die bestaat) van een niet-normale matrix A .

Oefening 3

Gegeven is een lineaire operator $\phi : \mathbb{C}^{m \times n} \mapsto \mathbb{C}^{m \times n}$, gedefinieerd als:

$$\phi(X) := AX - XB.$$

Toon aan dat $\phi(X)$ inverteerbaar is als, en alleen als²:

$$\lambda(A) \cap \lambda(B) = \emptyset \tag{3}$$

Hints.

- ▶ Voor het “*alleen als*” gedeelte: wat doen matrices $X = vw^*$, met $Av = \lambda v$ en $w^*B = \lambda w^*$?
- ▶ Voor het “*als*” gedeelte: probeer eerst de vraag de beantwoorden als A en B bovendriehoeksmatrices zijn. Inductie is je vriend hier.

² $\lambda(C) := \{\lambda \in \mathbb{C} : Cv = \lambda v, \quad v \neq 0\}$

Oefening 3 - antwoord

Het “*alleen als*” gedeelte is snel bewezen met goed inzicht. Merk op dat als er een $\lambda \in C$ bestaat met $Av = \lambda v$ en $w^*B = \lambda w^*$, dan geeft $X = vw^*$:

$$\phi(vw^*) = Avw^* - vw^*B = \lambda vw^* - vw^*\lambda = 0.$$

Oefening 3 - antwoord

Voor het “als” gedeelte, moeten we aantonen dat:

$$\phi(X) = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0$$

Met behulp van de Schur decomposities $A = QTQ^*$, $B = URU^*$ hebben we:

$$QTQ^*X - XURU^* = 0 \quad T(Q^*XU) = (Q^*XU)R$$

Definieer $Y := Q^*XU$.

Oefening 3 - antwoord

We gebruiken *inductie* om aan te tonen dat:

$$TY = YR \Rightarrow Y = 0$$

Oefening 3 - antwoord

We gebruiken *inductie* om aan te tonen dat:

$$TY = YR \Rightarrow Y = 0$$

Basis-stap. Voor $n = m = 1$, hebben $r \neq t$ volgens (3), dus $y = 0$.

Oefening 3 - antwoord

We gebruiken *inductie* om aan te tonen dat:

$$TY = YR \Rightarrow Y = 0$$

Basis-stap. Voor $n = m = 1$, hebben $r \neq t$ volgens (3), dus $y = 0$.

Inductie-stap. Breek de vergelijkingen op in:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & T_{12} \\ & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & R_{12} \\ & R_{22} \end{bmatrix}$$

Oefening 3 - antwoord

We gebruiken *inductie* om aan te tonen dat:

$$TY = YR \Rightarrow Y = 0$$

Basis-stap. Voor $n = m = 1$, hebben $r \neq t$ volgens (3), dus $y = 0$.

Inductie-stap. Breek de vergelijkingen op in:

$$\begin{bmatrix} t_{11}y_{11} + T_{12}Y_{21} & t_{11}Y_{12} + T_{12}Y_{22} \\ T_{22}Y_{21} & T_{22}Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}r_{11} & y_{11}R_{12} + Y_{12}R_{22} \\ Y_{21}r_{11} & Y_{21}R_{12} + Y_{22}R_{22} \end{bmatrix}$$

Oefening 3 - antwoord

We gebruiken *inductie* om aan te tonen dat:

$$TY = YR \Rightarrow Y = 0$$

Basis-stap. Voor $n = m = 1$, hebben $r \neq t$ volgens (3), dus $y = 0$.

Inductie-stap. Breek de vergelijkingen op in:

$$\begin{bmatrix} t_{11}y_{11} + T_{12}Y_{21} & t_{11}Y_{12} + T_{12}Y_{22} \\ \textcolor{red}{T_{22}}Y_{21} & T_{22}Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}r_{11} & y_{11}R_{12} + Y_{12}R_{22} \\ \textcolor{red}{Y_{21}}r_{11} & Y_{21}R_{12} + Y_{22}R_{22} \end{bmatrix}$$

Volgens (3) is $r_{11} \notin \lambda(T_{22})$. Dus $Y_{21} = 0$.

Oefening 3 - antwoord

We gebruiken *inductie* om aan te tonen dat:

$$TY = YR \Rightarrow Y = 0$$

Basis-stap. Voor $n = m = 1$, hebben $r \neq t$ volgens (3), dus $y = 0$.

Inductie-stap. Breek de vergelijkingen op in:

$$\begin{bmatrix} t_{11}y_{11} + T_{12} \cdot 0 & t_{11}Y_{12} + T_{12}Y_{22} \\ T_{22} \cdot 0 & T_{22}Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}r_{11} & y_{11}R_{12} + Y_{12}R_{22} \\ 0 \cdot r_{11} & 0 \cdot R_{12} + Y_{22}R_{22} \end{bmatrix}$$

Volgens (3) is $r_{11} \notin \lambda(T_{22})$. Dus $Y_{21} = 0$.

Oefening 3 - antwoord

We gebruiken *inductie* om aan te tonen dat:

$$TY = YR \Rightarrow Y = 0$$

Basis-stap. Voor $n = m = 1$, hebben $r \neq t$ volgens (3), dus $y = 0$.

Inductie-stap. Breek de vergelijkingen op in:

$$\begin{bmatrix} t_{11}y_{11} & t_{11}Y_{12} + T_{12}Y_{22} \\ 0 & T_{22}Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}r_{11} & y_{11}R_{12} + Y_{12}R_{22} \\ 0 & Y_{22}R_{22} \end{bmatrix}$$

Volgens (3) is $r_{11} \neq t_{11}$. Dus $y_{11} = 0$.

Oefening 3 - antwoord

We gebruiken *inductie* om aan te tonen dat:

$$TY = YR \Rightarrow Y = 0$$

Basis-stap. Voor $n = m = 1$, hebben $r \neq t$ volgens (3), dus $y = 0$.

Inductie-stap. Breek de vergelijkingen op in:

$$\begin{bmatrix} t_{11} \cdot 0 & t_{11} Y_{12} + T_{12} Y_{22} \\ 0 & T_{22} Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot r_{11} & 0 \cdot R_{12} + Y_{12} R_{22} \\ 0 & Y_{22} R_{22} \end{bmatrix}$$

Volgens (3) is $r_{11} \neq t_{11}$. Dus $y_{11} = 0$.

Oefening 3 - antwoord

We gebruiken *inductie* om aan te tonen dat:

$$TY = YR \Rightarrow Y = 0$$

Basis-stap. Voor $n = m = 1$, hebben $r \neq t$ volgens (3), dus $y = 0$.

Inductie-stap. Breek de vergelijkingen op in:

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{11}Y_{12} + T_{12}Y_{22} \\ 0 & T_{22}Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Y_{12}R_{22} \\ 0 & Y_{22}R_{22} \end{bmatrix}$$

Volgens (3) is $r_{11} \neq t_{11}$. Dus $y_{11} = 0$.

Oefening 3 - antwoord

We gebruiken *inductie* om aan te tonen dat:

$$TY = YR \Rightarrow Y = 0$$

Basis-stap. Voor $n = m = 1$, hebben $r \neq t$ volgens (3), dus $y = 0$.

Inductie-stap. Breek de vergelijkingen op in:

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{11} Y_{12} + T_{12} Y_{22} \\ 0 & \textcolor{red}{T_{22} Y_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Y_{12} R_{22} \\ 0 & \textcolor{red}{Y_{22} R_{22}} \end{bmatrix}$$

Pas de inductie hypothese toe.

Oefening 3 - antwoord

We gebruiken *inductie* om aan te tonen dat:

$$TY = YR \Rightarrow Y = 0$$

Basis-stap. Voor $n = m = 1$, hebben $r \neq t$ volgens (3), dus $y = 0$.

Inductie-stap. Breek de vergelijkingen op in:

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{11} Y_{12} + T_{12} \cdot 0 \\ 0 & T_{22} \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Y_{12} R_{22} \\ 0 & 0 \cdot R_{22} \end{bmatrix}$$

Pas de inductie hypothese toe.

Oefening 3 - antwoord

We gebruiken *inductie* om aan te tonen dat:

$$TY = YR \Rightarrow Y = 0$$

Basis-stap. Voor $n = m = 1$, hebben $r \neq t$ volgens (3), dus $y = 0$.

Inductie-stap. Breek de vergelijkingen op in:

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{11} Y_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Y_{12} R_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Volgens (3) is $t_{11} \notin \lambda(R_{22})$. Dus $Y_{12} = 0$.

Blok-diagonale decompositie

Het resultaat van de vorige oefening kan goed gebruikt om de volgende stelling te bewijzen.

Theorem

Een matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kan ontbonden worden in:

$$A = S \begin{bmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_m \end{bmatrix} S^{-1}$$

waar R_i bovendriehoeksmatrices zijn van de vorm:

$$R_i = \lambda_i I + N_i, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j.$$

Blok-diagonale decompositie (bewijs)

Proof.

Gegeven $m \leq n$ unieke eigenwaarden zijn voor A en gegeven de Schur decompositie $A = QTQ^*$, kies een permutatie matrix P zodat:

$$PTP^T = \begin{bmatrix} R_1 & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ & R_2 & \cdots & R_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & R_m \end{bmatrix}$$

met R_i bovendriehoeksmatrices in de vorm:

$$R_i = \lambda_i I + N_i, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j.$$

Hoe maken we de niet diagonale elementen nul?



Blok-diagonale decompositie (bewijs)

Proof.

We doen het een keer voor. Doe de volgende gelijkvormigheidstransformatie:

$$\begin{bmatrix} I & -Y \\ & I \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|ccc} R_1 & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ \hline & R_2 & \cdots & R_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & R_m \end{array} \right] \begin{bmatrix} I & Y \\ & I \end{bmatrix}$$



Blok-diagonale decompositie (bewijs)

Proof.

We doen het een keer voor. Doe de volgende soortgelijke transformatie:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} R_1 & & & & \\ \hline & R_2 & \cdots & R_{2m} & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & R_m & \end{array} \right]$$

waarbij:

$$\varphi = R_1 Y - Y \begin{bmatrix} R_2 & \cdots & R_{2m} \\ & \ddots & \vdots \\ & & R_m \end{bmatrix} + [R_{12} \quad \cdots \quad R_{1m}] = 0.$$

Gebruik nu het resultaat in oefening 3.



Eigen-decomposities en de Jordan normale form

- ▶ Als de geometrische multipliciteiten gelijk zijn aan de algebraïsche multipliciteiten, dan is $N_i = 0$. Dus hebben de eigen-decompositie van A .
- ▶ Als dit niet zo het geval is, dan moet er extra werk verricht worden om het om te toveren naar een Jordan decompositie. (Ik bespaar jullie de details)